

# Les Nombres premiers

Activité 1 page 43 du livre Trans math 3ième + activité TICE n° 79 p 51.

## I - Rappels sur les critères de divisibilité

Pour savoir si un entier naturel  $a$  est divisible par un entier naturel  $b$  on peut toujours effectuer la division de  $a$  par  $b$  et regarder si le reste est égal à 0.

Il existe cependant quelques règles simples qui permettent de reconnaître les entiers naturels divisibles par 2, par 3 par 4, par 5 ou par 9.

Pour savoir si un nombre donné est divisible par 2, 3, 4, 5, 9 ou 10, on utilise les critères suivants :

- Un nombre est **divisible par 2** s'il se termine par un nombre pair
- Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3
- Un nombre est **divisible par 4** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4
- Un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9

### Exemples

- 1358 est divisible par 2 ; il suffit de remarquer que son dernier chiffre est 8.
- 745 est divisible par 5 ; il suffit de remarquer que son dernier chiffre est 5.
- 114 est divisible par 3 ; il suffit de remarquer que la somme de ses chiffres qui est  $1+1+4$ , soit 6, est divisible par 3.

### Attention

Il ne faut pas inventer des caractères de divisibilité qui n'existent pas.

- Les nombres qui se terminent par 3, 6 ou 9 ne sont pas obligatoirement divisibles par 3, il suffit de penser à 13, 16 ou 19.
- Les nombres qui se terminent par 7 ou dont la somme des chiffres est un multiple de 7 ne sont pas obligatoirement divisibles par 7, il suffit de penser à 17 ou à 34.

Les règles qui sont valables pour 2, 3 et 5 ne s'étendent pas aux autres nombres.

## II - Nombres premiers

### 1- Définition

Un nombre premier est un nombre entier qui a **exactement** deux diviseurs : 1 et lui-même.

#### Exemples :

- 2, 3, 5, 7, 11 sont des nombres premiers
- 4 n'est pas un nombre premier car il a trois diviseurs : 1, 4 et 2
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

#### A retenir :

Il est utile de connaître les nombres premiers inférieurs à 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Exercices n° 7 à 12 p 46 + n° 25 p 47 du livre Transmath 3e 2016.  
n° 88 p 53 + n° 91 et 92 p 53.

## 2- Décomposition en produit de facteurs premiers

### a- Propriété

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. On dit alors qu'il est décomposé en produit de facteurs premiers.

#### Exemples

- $15 = 3 \times 5$
- $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

#### Attention

La décomposition en produit de facteurs premiers est unique.

Ainsi,  $18 = 2 \times 9$  ou  $18 = 3 \times 6$  ne sont pas des décompositions en produit de facteurs premiers de 18, car 9 et 6 ne sont pas premiers. La seule décomposition en produit de facteurs premiers de 18 est  $2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

### b- Méthodes de décomposition

#### Exemple 1 Décomposition de 84 en produit de facteurs premiers

La décomposition est unique : elle ne dépend pas du procédé utilisé pour l'obtenir.

**1<sup>re</sup> méthode** : on cherche ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

- 84 est divisible par 2 :  $84 = 2 \times 42$
- 42 est divisible par 2 :  $84 = 2 \times 2 \times 21$
- 21 est divisible par 3 :  $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

Or, 7 est premier, donc la décomposition de 84 en produit de facteurs premiers est terminée.

On écrit cette décomposition :  $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ .

**2<sup>e</sup> méthode** : on écrit d'abord un produit quelconque égal à 84.

$$84 = 4 \times 21 \text{ donc } 84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

Les nombres 2, 3 et 7 sont premiers, donc la décomposition de 84 en produit de facteurs premiers est :  $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ .

#### Exemple 2 Décomposition de 1 600 en produit de facteurs premiers

$1\ 600 = 16 \times 100 = 4 \times 4 \times 4 \times 25$  donc  $1\ 600 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5^2$ .

La décomposition de 1 600 en produit de facteurs premiers est :  $1\ 600 = 2^6 \times 5^2$ .

## 3- Application à la simplification des fractions

La décomposition des nombres entiers en produits de facteurs premiers permet de simplifier les fractions au maximum, donc de les rendre irréductibles.

On décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers puis on simplifie jusqu'à ce qu'ils soient composés de facteurs premiers différents.

#### Exemple :

Simplifions la fraction  $\frac{28}{70}$ .

On a  $28 = 2^2 \times 7$  et  $70 = 2 \times 5 \times 7$ , d'où

$$\frac{28}{70} = \frac{2^2 \times 7}{2 \times 5 \times 7} = \frac{2}{5}.$$