

Exercices de 3^{ème} – Chapitre 2 – Calcul littéral

Énoncés

Exercice 1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$A = 3(4x + 7) + 4(2x - 9)$$

$$B = 7x(2x - 5) - x(2x - 5)$$

$$C = (2x + 5)(3x + 7)$$

$$D = (2x - 5)(3x - 2)$$

Exercice 2

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$E = (2x + 3)(5x - 8) - (2x - 4)(5x - 1)$$

$$F = (5x - 2)(5x - 8) - (3x - 5)(x + 7)$$

$$G = 2(x + 7)(3 - 2x) + (5x - 2)(4x + 1)$$

Exercice 3

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes **sans étape de calcul** :

$$H = (x + 5)^2$$

$$I = (4x + 6)^2$$

$$J = (x - 5)^2$$

$$K = (3x - 7)^2$$

$$L = (y + 3)(y - 3)$$

$$M = (2x + 5)(2x - 5)$$

Exercice 4

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$N = \left(3x - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$P = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{2}\right)$$

$$Q = (x + 2)^2 - 6(3x - 5)^2$$

Exercice 5

a] $(3x + \dots)^2 = \dots + \dots + 49$

b] $(5x - \dots)^2 = \dots - \dots + 36$

c] $(6x + \dots)(\dots - \dots) = \dots - 64$

d] $(\dots + \dots)^2 = \dots + 70x + 25$

e] $(\dots - \dots)^2 = 16x^2 - 72x + \dots$

Exercice 6

1. Écrire comment effectuer mentalement les calculs suivants à l'aide des identités remarquables.

a] 103^2

b] 98^2

c] 401×399

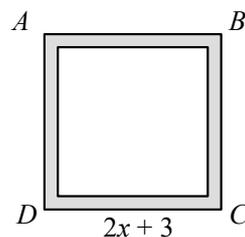
2. Calculer la valeur de 100001^2 puis vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice. Que remarque-t-on ?

Exercice 7

Sur la figure ci-contre, le carré $ABCD$ a pour côté $(2x + 3)$ centimètres.

Afin d'obtenir une bande de 1 cm de large, on découpe un petit carré à l'intérieur du grand carré.

Exprimer l'aire de la bande grise en fonction de x .



Exercice 8

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = (x + 2)(2x - 1) + (x + 2)(3x + 2) \quad B = (3x + 7)(2x - 9) - (3x + 7)(5x - 7) \quad C = (8y + 3)(5y + 7) - 3(8y + 3)(2y - 1)$$

Exercice 9

Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} D &= (2x + 3)^2 + (x - 2)(2x + 3) & F &= 2y^2 - y(4y - 7) \\ E &= (2t - 7) - (5t + 1)(2t - 7) & G &= (2t - 5)^2 + (2t - 5)(x - 1) + 2t - 5 \end{aligned}$$

Exercice 10

Factoriser les expressions suivantes :

$$I = 25x^2 - 36 \quad J = (3 - 2x)^2 - 4 \quad K = (x - 4)^2 - (2x - 1)^2$$

Exercice 11

On a le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre entier n .
- Mettre n au carré. Prendre le double du résultat.
- Soustraire au résultat précédent le produit de n par l'entier qui le suit.

Compléter cette phrase : "Ce programme revient à multiplier un nombre par ..."

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a]} \quad -2(2x - 4) &= 6x - (-3 + x) & \text{b]} \quad 4x - 2 + (5x - 1) &= -3(7 - x) & \text{c]} \quad \frac{x+5}{2} - \frac{2x-7}{5} &= 2 + \frac{3x}{10} \end{aligned}$$

Exercice 13

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{d]} \quad (3x + 7)(4x - 8) &= 0 & \text{e]} \quad 5(9x - 3)(-5x - 13) &= 0 & \text{f]} \quad (9x - 4)(-2 + 5x) - (9x - 4)(3x - 5) &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{g]} \quad 4(2 + 3x) - (x - 5) &= 0 & \text{h]} \quad 50x^2 &= 8 & \text{i]} \quad 4x^2 + 4x &= -1 \end{aligned}$$

Exercice 15

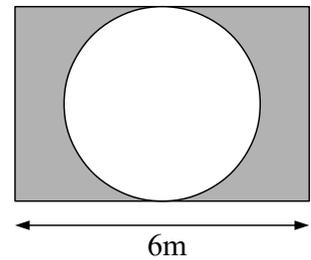
1. **a]** Développer et réduire $A = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$
b] En déduire le résultat de $10001^2 - 9999^2$
2. Chercher un moyen permettant de calculer $9997^2 - 9999 \times 9998$ sans avoir à poser d'opération.

Exercice 16

1. Déterminer les nombres dont le double est égal au triple du carré.
2. On sait que la somme des carrés de deux nombres positifs est égale à 34 et que le produit de ces deux nombres vaut 15. Calculer la somme de ces deux nombres.

Exercice 17

Un disque de rayon non nul est tangent à deux côtés opposés d'un rectangle de longueur 6m. Calculer le rayon du disque pour que son aire soit égale à l'aire grise.



Exercice 18

Un triangle ABC est tel que $AB=6$ cm ; $AC=x$ cm et $BC= x + 3$ cm.

Déterminer la valeur que doit prendre x pour que ABC soit rectangle en A .

Exercice 19

1. Factoriser $4x^2 - 12x + 9$.
2. Factoriser $(2x - 3)^2 - 4$.
3. En déduire une factorisation de $4x^2 - 12x + 5$.

Exercice 20

On a $A = (3 - x)^2 - (3 - x)(5 + x) + 5(9 - x^2)$

1. Développer A .
2. Factoriser A .
3. En choisissant la forme de A la plus adaptée, résoudre ces équations :
a] $A = 0$
b] $A = 39$

Corrigés

Exercice 1

$$\begin{aligned} A &= 3(4x + 7) + 4(2x - 9) \\ A &= 12x + 21 + 8x - 36 \\ A &= \mathbf{20x - 15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 7x(2x - 5) - x(2x - 5) \\ B &= 14x^2 - 35x - 2x^2 + 5x \\ B &= \mathbf{12x^2 - 30x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2x + 5)(3x + 7) \\ C &= 6x^2 + 14x + 15x + 35 \\ C &= \mathbf{6x^2 + 29x + 35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (2x - 5)(3x - 2) \\ D &= 6x^2 - 4x - 15x + 10 \\ D &= \mathbf{6x^2 - 19x + 10} \end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} E &= (2x + 3)(5x - 8) - (2x - 4)(5x - 1) \\ E &= 10x^2 - 16x + 15x - 24 - 10x^2 + 2x + 20x - 4 \\ E &= \mathbf{21x - 28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (5x - 2)(5x - 8) - (3x - 5)(x + 7) \\ F &= 25x^2 - 40x - 10x + 16 - 3x^2 - 21x + 5x + 35 \\ F &= \mathbf{22x^2 - 66x + 51} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= 2(x + 7)(3 - 2x) + (5x - 2)(4x + 1) \\ G &= 2(3x - 2x^2 + 21 - 14x) + 20x^2 + 5x - 8x - 2 \\ G &= 6x - 4x^2 + 42 - 28x + 20x^2 + 5x - 8x - 2 \\ G &= \mathbf{16x^2 - 25x + 40} \end{aligned}$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} H &= (x + 5)^2 \\ H &= \mathbf{x^2 + 10x + 25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= (x - 5)^2 \\ J &= \mathbf{x^2 - 10x + 25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= (y + 3)(y - 3) \\ L &= \mathbf{y^2 - 9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (4x + 6)^2 \\ I &= \mathbf{16x^2 + 48x + 36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= (3x - 7)^2 \\ K &= \mathbf{9x^2 - 42x + 49} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= (2x + 5)(2x - 5) \\ M &= \mathbf{4x^2 - 25} \end{aligned}$$

Exercice 4

$$\begin{aligned} N &= \left(3x - \frac{2}{3}\right)^2 \\ N &= \mathbf{9x^2 - 4x + \frac{4}{9}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{2}\right) \\ P &= \mathbf{\frac{x^2}{9} - \frac{25}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= (x + 2)^2 - 6(3x - 5)^2 \\ Q &= x^2 + 4x + 4 - 6(9x^2 - 30x + 25) \\ Q &= x^2 + 4x + 4 - 54x^2 + 180x - 150 \\ Q &= \mathbf{-53x^2 + 184x - 146} \end{aligned}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned} \text{a]} & (3x + 7)^2 = \mathbf{9x^2 + 42x + 49} \\ \text{b]} & (5x - 6)^2 = \mathbf{25x^2 - 60x + 36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c]} & (6x + 8)(6x - 8) = \mathbf{36x^2 - 64} \\ \text{d]} & (7x + 5)^2 = \mathbf{49x^2 + 70x + 25} \end{aligned}$$

$$\text{e]} \quad (4x - 9)^2 = \mathbf{16x^2 - 72x + 81}$$

Exercice 6

$$\begin{aligned} 1. \quad \text{a]} & 103^2 = (100 + 3)^2 \\ & 103^2 = 10000 + 600 + 9 \\ & \mathbf{103^2 = 10609} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{On a} & 100\,001^2 = (10^5 + 1)^2 \\ & 100\,001^2 = 10^{10} + 2 \times 10^5 + 1 \\ & 100\,001^2 = \mathbf{10\,000\,200\,001} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b]} & 98^2 = (100 - 2)^2 \\ & 98^2 = 10000 - 400 + 4 \\ & \mathbf{98^2 = 9604} \end{aligned}$$

Quand on tape ce calcul, la calculatrice donne 10 000 200 000 , un résultat faux dû aux arrondis.

$$\begin{aligned} \text{c]} & 401 \times 399 = (400 + 1)(400 - 1) \\ & 401 \times 399 = 160\,000 - 1 \\ & \mathbf{401 \times 399 = 159\,999} \end{aligned}$$

Exercice 7

1ère façon :

L'aire du carré $ABCD$ vaut $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

Le carré retiré a pour aire $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

donc la bande grise a pour aire $4x^2 + 12x + 9 - (4x^2 + 4x + 1)$ soit $4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 - 4x - 1$ donc **$8x + 8$** .

2ème façon :

L'aire de la bande grise est $(2x + 3)^2 - (2x + 1)^2 = (2x + 3 - 2x - 1) \times (2x + 3 + 2x + 1)$ soit **$8x + 8$** .

Exercice 8

$$A = (x + 2)(2x - 1) + (x + 2)(3x + 2)$$

$$A = (x + 2)(2x - 1 + 3x + 2)$$

$$A = (x + 2)(5x + 1)$$

$$B = (3x + 7)(2x - 9) - (3x + 7)(5x - 7)$$

$$B = (3x + 7)(2x - 9 - 5x + 7)$$

$$B = (3x + 7)(-3x - 2)$$

$$C = (8y + 3)(5y + 7) - 3(8y + 3)(2y - 1)$$

$$C = (8y + 3)(5y + 7 - 6y + 3)$$

$$C = (8y + 3)(-y + 10)$$

Exercice 9

$$D = (2x + 3)^2 + (x - 2)(2x + 3)$$

$$D = (2x + 3)(2x + 3 + x - 2)$$

$$D = (2x + 3)(3x + 1)$$

$$F = 2y^2 - y(4y - 7)$$

$$F = y(2y - 4y + 7)$$

$$F = y(-2y + 7)$$

$$E = (2t - 7) - (5t + 1)(2t - 7)$$

$$E = (2t - 7)(1 - 5t - 1)$$

$$E = -5t(2t - 7)$$

$$I = (2t - 5)^2 + (2t - 5)(x - 1) + 2t - 5$$

$$I = (2t - 5)(2t - 5 + x - 1 + 1)$$

$$I = (2t - 5)(2t + x - 5)$$

$$I = (2t - 5)(2t + x - 5)$$

Exercice 10

$$I = 25x^2 - 36$$

$$I = (5x)^2 - 6^2$$

$$I = (5x - 6)(5x + 6)$$

$$J = (3 - 2x)^2 - 4$$

$$J = (3 - 2x - 2)(3 - 2x + 2)$$

$$J = (1 - 2x)(5 - 2x)$$

$$K = (x - 4)^2 - (2x - 1)^2$$

$$K = (x - 4 - 2x + 1)(x - 4 + 2x - 1)$$

$$K = (-x - 3)(3x - 5)$$

Exercice 11

Le programme revient à calculer : $2 \times n^2 - n \times (n + 1)$ soit, en développant : $2n^2 - n^2 - n = n^2 - n$ puis, par factorisation : $n(n - 1)$.

Ce programme revient à multiplier un nombre par **celui qui le précède**.

Exercice 12

a] $-2(2x - 4) = 6x - (-3 + x)$

$$-4x + 8 = 6x + 3 - x$$

$$-4x - 6x + x = +3 - 8$$

$$-9x = -5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

La solution de l'équation est $\frac{5}{9}$.

b] $4x - 2 + (5x - 1) = -3(7 - x)$

$$4x - 2 + 5x - 1 = -21 + 3x$$

$$4x - 3x + 5x = -21 + 2 + 1$$

$$6x = -18$$

$$x = -\frac{18}{6}$$

La solution de l'équation est (-3) .

c] $\frac{x+5}{2} - \frac{2x-7}{5} = 2 + \frac{3x}{10}$

$$\frac{5 \times (x+5)}{10} - \frac{2 \times (2x-7)}{10} = \frac{20}{10} + \frac{3x}{10}$$

$$5 \times (x+5) - 2 \times (2x-7) = 20 + 3x$$

$$-2x = -19$$

La solution de l'équation est $\frac{19}{2}$.

Exercice 13

- d] $(3x+7)(4x-8)=0$ On a $3x+7=0$ ou $4x-8=0$ donc l'ensemble des solutions de l'équation sont $-\frac{7}{3}$ et 2.
- e] $5(9x-3)(-5x-13)=0$ On a $9x-3=0$ ou $-5x-13=0$ donc l'ensemble des solutions de l'équation sont $\frac{1}{3}$ et $-\frac{13}{5}$.
- f] $(9x-4)(-2+5x)-(9x-4)(3x-5)=0$
 $(9x-4)(-2+5x-3x+5)=0$
 $(9x-4)(2x+3)=0$ On a $9x-4=0$ ou $2x+3=0$ donc l'ensemble des solutions de l'équation sont $\frac{4}{9}$ et $-\frac{3}{2}$.

Exercice 14

- | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>g] $4(2+3x)-(x-5)=0$
 $8+12x-x+5=0$
 $11x=-13$
 La solution de l'équation est $-\frac{13}{11}$.</p> | <p>h] $50x^2=8$
 $25x^2=4$
 $25x^2-4=0$
 $(5x-2)(5x+2)=0$
 donc $5x-2=0$ ou $5x+2=0$
 Les solutions de l'équation sont $-\frac{2}{5}$ et $\frac{2}{5}$.</p> | <p>i] $4x^2+4x=-1$
 $4x^2+4x+1=0$
 $(2x+1)^2=0$
 $2x+1=0$
 La solution de l'équation est $-\frac{1}{2}$.</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Exercice 15

1. a] $A=(x+1)^2-(x-1)^2$
 $A=(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)$
 $A=x^2+2x+1-x^2+2x-1$
 $A=4x$
- b] Pour calculer 10001^2-9999^2 on pose $x=10\,000$ et l'on reconnaît que $10001^2-9999^2=(x+1)^2-(x-1)^2$
 D'après a] on a $10001^2-9999^2=4x$ d'où $10001^2-9999^2=40\,000$.
2. En attendant de remplacer x par 10000, cherchons à simplifier l'écriture de :
 $(x-3)^2-(x-1)(x-2)=x^2-6x+9-(x^2-2x-x+2)$
 $=x^2-6x+9-x^2+2x+x-2$
 $=-3x+7$

Pour calculer $9997^2-9999 \times 9998$ il suffit alors de remplacer x par 10 000 dans $(-3x+7)$.

On a donc $9997^2-9999 \times 9998 = -3 \times 10000 + 7$ d'où $9997^2-9999 \times 9998 = -29993$.

Exercice 16

1. Soit x un nombre dont le double est égal au triple du carré.
- Cherchons x tel que $2x=3x^2$
 $2x-3x^2=0$
 $x(2-3x)=0$
- On a donc $x=0$ ou $2-3x=0$
 $2=3x$
 $x=\frac{2}{3}$
- Les nombres dont le double est égal au triple du carré sont 0 et $\frac{2}{3}$.

Exercices de 3^{ème} – Chapitre 2 – Calcul littéral

2. Soient x et y deux nombres positifs tels que $x^2 + y^2 = 34$ et $xy = 15$.

On a donc $x^2 + 2xy + y^2 = 34 + 30$ On reconnaît une identité remarquable.

D'où $(x + y)^2 = 64$

$$(x + y)^2 - 64 = 0$$

On reconnaît une autre identité remarquable.

$$(x + y - 8)(x + y + 8) = 0$$

On reconnaît une équation-produit.

On a donc $x + y - 8 = 0$ ou $x + y + 8 = 0$

Donc $x + y = 8$ ou $x + y = -8$

Comme x et y sont tous les deux positifs alors $x + y$ est positif d'où $x + y = 8$.

Exercice 17

Soit r le rayon du disque. L'aire du disque vaut πr^2 .

La largeur du rectangle vaut $2r$ donc son aire vaut $2r \times 6 = 12r$.

Cherchons r tel que $\pi r^2 = 12r - \pi r^2$

$$2\pi r^2 - 12r = 0$$

$$r(2\pi r - 12) = 0$$

On a donc $r = 0$ ou $2\pi r - 12 = 0$

$$2\pi r = 12$$

$$r = \frac{12}{2\pi}$$

Comme le rayon du disque n'est pas nul alors **le rayon vaut $\frac{6}{\pi}$ m.**

Exercice 18

Pour que ABC soit rectangle en A il faut que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$(x + 3)^2 = 6^2 + x^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = 36 + x^2$$

$$6x = 27$$

$$x = \frac{27}{6}$$

$$x = \frac{9}{2}$$

Pour que ABC soit rectangle en A il faut que $x = 4,5$ cm.

Exercice 19

1. On a $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

2. On a $(2x - 3)^2 - 4 = (2x - 3 - 2)(2x - 3 + 2)$
 $= (2x - 5)(2x - 1)$

3. On a $4x^2 - 12x + 5 = 4x^2 - 12x + 9 - 4$
 $= (2x - 3)^2 - 4$
 $= (2x - 5)(2x - 1)$

Exercice 20

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= (3-x)^2 - (3-x)(5+x) + 5(9-x^2) \\
 &= 9 - 6x + x^2 - (15 + 3x - 5x - x^2) + 45 - 5x^2 \\
 &= 9 - 6x + x^2 - 15 - 3x + 5x + x^2 + 45 - 5x^2
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } A = -3x^2 - 4x + 39$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{On a } A &= (3-x)(3-x) - (3-x)(5+x) + 5(3-x)(3+x) \\
 \text{donc } A &= (3-x)[(3-x) - (5+x) + 5(3+x)] \\
 &= (3-x)[3-x-5-x+15+5x]
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } A = (3-x)(13+3x)$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \text{a] Résolvons } A &= 0 \\
 \text{soit } (3-x)(13+3x) &= 0 \quad \text{On reconnaît une équation-produit.} \\
 \text{donc } 3-x &= 0 \quad \text{ou } 13+3x = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Les solutions de } A = 0 \text{ sont } -\frac{13}{3} \text{ et } 3.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b] Résolvons } A &= 39 \\
 \text{soit } -3x^2 - 4x + 39 &= 39 \\
 -3x^2 - 4x &= 0 \\
 x(-3x - 4) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Les solutions de } A = 39 \text{ sont } -\frac{4}{3} \text{ et } 0.$$