RAPPEL : SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

I Suites arithmétiques

1 Définition

Une suite (u_n) est **arithmétique** si chaque terme s'obtient **en ajoutant** au précédent un **même** nombre réel constant r.

C'est à dire, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$
Le réel r est appelé **la raison** de la suite arithmétique.

2 Méthode : Prouver qu'une suite est arithmétique

Pour **démontrer** qu'une suite est **arithmétique**, il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n$ pour vérifier que la différence $u_{n+1} - u_n$ est **constante**.
Cette **constante** est alors la **raison** de la suite arithmétique.

3 Propriété 1 : Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r \geq 0$ alors la suite (u_n) est **croissante**
- Si $r \leq 0$ alors la suite (u_n) est **décroissante**
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est **constante**

4 Propriété 2 : Expression de (u_n) en fonction de n

Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r.

- Si le premier terme de la suite est u_0 alors pour tout entier n, $u_n = u_0 + n \times r$

- Si le premier terme de la suite est u_p alors pour tout entier $n \geq p$, $u_n = u_p + (n - p) \times r$

EXEMPLE :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = -1$

1. Pour tout entier n, exprimer u_n en fonction de n.
   Solution :
   D'après la propriété 2 précédente, on a : $u_n = u_0 + n \times r$ d'où en remplaçant par les valeurs numériques : $u_n = -1 + n \times \frac{1}{4} = -1 + \dfrac{1}{4}n$.
2. Calculer u_{12}.
   Solution :
   Avec l'expression précédente, on remplace n par 12 soit : $u_{12} = -1 + \dfrac{1}{4} \times 12 = 2$.

II Suites géométriques

1 Définition

Une suite (u_n) est **géométrique** si chaque terme s'obtient **en multipliant** le précédent par un **même** nombre réel constant q.

C'est à dire, pour tout entier n, $u_{n+1} = qu_n$
Le réel q est appelé **la raison** de la suite géométrique.

2 ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\dfrac{t}{100}$.
- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\dfrac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\dfrac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

Un capital de 2 000 € est placé **au taux d'intérêt composé** de 1,5% par an.
On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :

$$C_{n+1}=\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)\times C_n=1{,}015\times C_n$$

Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0=2000$ et de raison $q=1{,}015$.

3 MÉTHODE : PROUVER QU'UNE SUITE EST GÉOMÉTRIQUE

Pour **démontrer** qu'une suite est **géométrique**, il suffit de calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour vérifier que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est **constant**.
Cette **constante** est alors la **raison** de la suite géométrique.

4 PROPRIÉTÉ 1 : EXPRESSION DE (u_n) EN FONCTION DE n

Soit (u_n) une suite **géométrique** de raison q.

- Si le premier terme de la suite est u_0 alors pour tout entier n, $u_n=u_0\times q^n$
- Si le premier terme de la suite est u_1 alors pour tout entier $n\geq 1$, $u_n=u_1\times q^{n-1}$
- Si le premier terme de la suite est u_p alors pour tout entier n et pour tout entier p, $u_n=u_p\times q^{n-p}$

5 PROPRIÉTÉ 2 : Somme de suites géométriques

Si n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1+q+q^2+q^3+\ \dots\dots+\ q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

EXEMPLES

Calculer la somme S suivante : $S=1+3+3^2+\ \dots+\ 3^{13}$

S est la somme des 14 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q=3$

$$S=1+3+3^2+\ \dots+\ 3^{13}=\frac{1-3^{13+1}}{1-3}=\frac{1-3^{14}}{1-3}=2\,391\,484$$