

Choisir la forme la plus appropriée d'une fonction pour le calcul d'antécédents

Cette fiche d'activité s'inscrit dans une progression globale visant l'acquisition des compétences de calcul intervenant sans l'étude des fonctions.

L'activité proposée est relative au thème "Résoudre des problèmes du type $f(x) = k$ " étudié en classe de seconde. Elle a pour but de développer **progressivement** les compétences suivantes en termes de calcul manuel et instrumenté :

- Identification et choix d'une forme adaptée pour résoudre un problème du type $f(x) = k$.
- Transformation d'écriture pour obtenir une forme adaptée.

Exercice : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} : $f(x) = x^2 + 16x + 39$

- a) Démontrer que $f(x) = (x + 8)^2 - 25$
- b) Factoriser $f(x)$
- c) Déterminer les antécédents par f de 0
- d) Déterminer les antécédents par f de -16
- e) Déterminer les antécédents par f de 39
- f) Déterminer les antécédents par f de -34

Réponse :

a) $(x + 8)^2 - 25 = x^2 + 16x + 64 - 25 = x^2 + 16x + 39 = f(x)$

b) $(x + 8)^2 - 25 = (x + 8)^2 - 5^2 = (x + 8 - 5)(x + 8 + 5) = (x + 3)(x + 13)$

Remarque essentielle: La fonction $f(x)$ peut donc s'écrire sous trois formes différentes :

$$f(x) = x^2 + 16x + 39 \quad (1)$$

$$f(x) = (x + 8)^2 - 25 \quad (2)$$

$$f(x) = (x + 3)(x + 13) \quad (3)$$

Pour chaque exercice, on est amené à choisir la « bonne forme », permettant la résolution aisée de l'exercice.

c) Pour déterminer le ou les antécédents de 0, on doit résoudre l'équation $f(x) = 0$. La forme la plus adaptée est la forme (3) car nous sommes amenés à résoudre l'équation produit nul : $(x + 3)(x + 13) = 0$

$$(x + 3)(x + 13) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 13 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = -13$$

Les antécédents de 0 par f sont donc -13 et -3.

d) Pour déterminer le ou les antécédents de -16, on doit résoudre l'équation $f(x) = -16$. La forme la plus adaptée est la forme (2) car nous avons à résoudre l'équation: $(x + 8)^2 - 25 = -16$

C'est-à-dire :

$$(x + 8)^2 = -16 + 25$$

$$(x + 8)^2 = 9 \quad \text{On obtient donc :}$$

$$x + 8 = \sqrt{9} \quad \text{ou} \quad x + 8 = -\sqrt{9}$$

$$x + 8 = 3 \quad \text{ou} \quad x + 8 = -3$$

$$x = 3 - 8 = -5 \quad \text{ou} \quad x = -3 - 8 = -11$$

$$x = -5 \quad \text{ou} \quad x = -11$$

Les antécédents de -16 par f sont donc -11 et -5.

e) Pour déterminer le ou les antécédents de 39, on doit résoudre l'équation $f(x) = 39$. La forme la plus adaptée est la forme (1) car nous avons déjà 39 dans cette expression :

$$x^2 + 16x + 39 = 39 .$$

Ce qui revient à résoudre :

$$x^2 + 16x = 39 - 39$$

C'est-à-dire :

$$x^2 + 16x = 0$$

Factorisons par x cette expression : $x(x + 16) = 0$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 16 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -16$$

Les antécédents de 39 par f sont donc 0 et -16.

f) Pour déterminer le ou les antécédents de -34, on doit résoudre l'équation $f(x) = -34$. La forme la plus adaptée est la forme (2) car nous avons à résoudre l'équation:

$$(x + 8)^2 - 25 = -34$$

$$(x + 8)^2 = -34 + 25$$

On obtient donc :

$$(x + 8)^2 = -9$$

qui n'a aucune solution puisque le carré $(x + 8)^2$ ne peut être négatif.

-34 n'a pas d'antécédent par la fonction f .

Remarque : La forme 2 permet de déterminer, n'importe quel antécédent par la fonction f . Cet exemple, nous permet de voir comment choisir la « bonne forme », permettant la résolution plus aisée de l'exercice.