Intervalles de $\mathbb{R}$

Nous avons vu dans le chapitre précédent Les ensembles de nombres

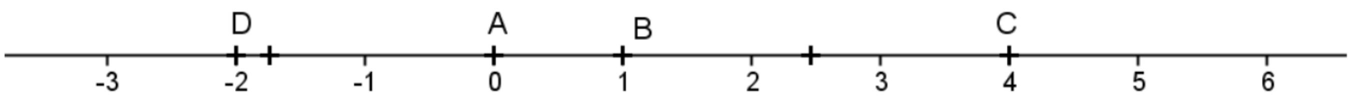
I) Les intervalles de $\mathbb{R}$

1) Définitions

a) Représentation graphique de $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est représenté sous la forme d'une droite graduée. A chaque point de la droite est associé un unique nombre réel appelé abscisse de ce point.

Exemple



Les abscisses des points A, B , C , D sont respectivement :
$x_A = 0$; $x_B = 1$; $x_C = 4$; $x_D = -2$

b) Les intervalles de $\mathbb{R}$

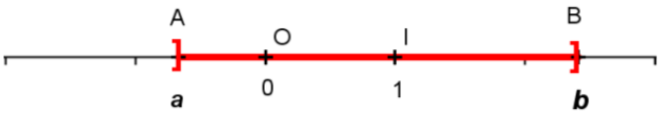
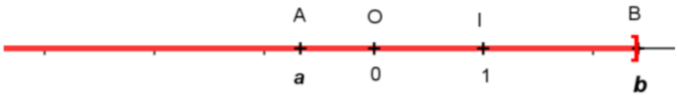
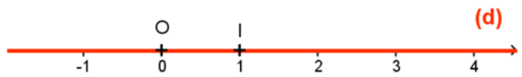
Un intervalle de $\mathbb{R}$ est représenté par un segment, une demi-droite ou par la droite toute entière. Chaque intervalle est associé à une inégalité ou un encadrement.
Soit A et B deux points de la droite d'abscisses respectives *a* et *b* (*a* < *b*) et soit M un point de la droite d'abscisse *x*
On obtient donc les différents intervalles suivants :

2) Tableau récapitulatif des neufs intervalles de $\mathbb{R}$

Remarques préliminaires :

- On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités lui appartiennent. Par exemple :[6 ; 12] est un intervalle fermé.
- On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités ne lui appartiennent pas. Par exemple :] -4 ; 7 [ou] - ∞ ; 3 [sont des intervalles ouverts.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ **est aussi un intervalle**, il peut se noter] -∞ ; + ∞[
- L'ensemble ne contenant aucun réel est aussi un intervalle, c'est l'intervalle vide(ou ensemble vide), **il se note Ø.**
- Le symbole **∞** se lit **infini.**

Inégalité	Représentation graphique	Notation intervalle
$a \leq x \leq b$	 **Intervalle fermé borné**	**[*a* ; *b*]**
$a < x < b$	 **Intervalle ouvert borné**	**] *a* ; *b* [**

$a \leq x < b$	 **Intervalle semi-ouvert à droite, borné**	**[*a* ; *b* [**
$a < x \leq b$	 **Intervalle semi-ouvert à gauche, borné**	**] *a* ; *b*]**
$x \geq a$	 **Intervalle fermé infini**	**[*a* ; +∞ [**
$x > a$	 **Intervalle ouvert infini**	**] *a* ; +∞ [**
$x \leq b$	 **Intervalle fermé infini**	**] - ∞ ; *b*]**
$x < b$	 **Intervalle ouvert infini**	**] - ∞ ; *b* [**
$x \in R$		**] - ∞ ; +∞[**

II) Intersections et réunions d'intervalles

1) Intersections

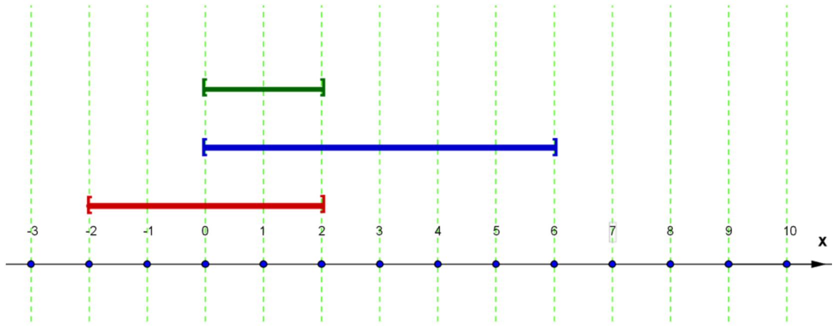
a) Définition

Soit E et F deux intervalles quelconques. On appelle intersection d e E et F, et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui sont communs à E et F.

En d'autres termes, X est un élément de $E \cap F$ si et seulement si X est un élément de E ET X est un élément de F.

b) Exemples

Exemple 1. En vert, l'intervalle *[0;2]*, intersection des intervalles *[-2;2]* en rouge et *[0;6]* en bleu.



[-2 ; 2] ∩ [0 ; 6] = [0 ; 2]

Exemple 2.]-2 ; 2[∩]0 ; 6[=]0 ; 2[

Exemple 3 :]-2 ; 2[∩]-3 ; 3[=]-2 ; 2[

Exemple 4 : [-1 ; 3] ∩ [3 ; 9] ={ 3 } L'intersection des deux intervalles est ici réduite un point.

Exemple 5 : [-3 ; 1] ∩ [3 ; 9] = ∅

L'intersection de ces deux intervalles est vide

2) Réunions

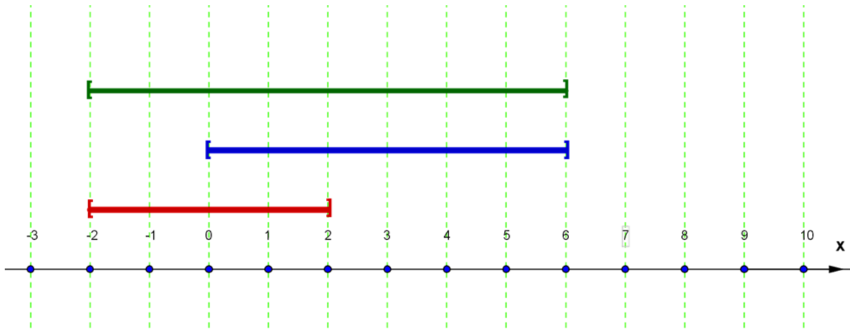
a) Définition

Soit E et F deux intervalles quelconques. On appelle réunion de E et F, et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui sont soit dans E, soit dans F.

En d'autres termes, X est un élément de $E \cup F$ si et seulement si X est un élément de E OU X est un élément de F.

b) Exemples

Exemple 1: En vert, l'intervalle *[-2; 6]*, réunion des intervalles *[-2; 2]* en rouge et *[0; 6]* en bleu.



[-2 ; 2] U [0 ; 6] = [-2 ; 6]

Exemple 2 :]-2 ; 2[U]-3 ; 3[=]-3 ; 3 [

Exemple 3: [-3 ; 1] U [3 ; 9] attention

Exemple 4:]-1 ; 3[U]3 ; 9[Dans ce cas on ne peut pas écrire la réunion sous forme d'un intervalle.

Exemple 5:]-1 ; 3] U]3 ; 9[=]-1 ; 9[