PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I. Probabilité conditionnelle

<u>Définition</u> : Soit *A* et *B* deux événements avec $P(A) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle** de *B* sachant *A*, la probabilité que l'événement *B* se réalise <u>sachant que</u> l'événement *A* est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

<u>Exemples</u> :

Dans une urne, on a 3 boules noires numérotées de 1 à 3, et 4 boules blanches numérotées de 1 à 4. On tire une boule.
On considère les événements :
A: "La boule tirée est noire."
B: "La boule tirée porte le numéro 3."

Boules	Noires	Blanches	Total
Numérotée 3	1	1	2
Numérotée 1-2 ou 4	2	3	5
Total	3	4	7

La probabilité que la boule tirée porte le numéro 3 sachant qu'elle est noire est : $P_A(B) = \frac{1}{3}$.
La probabilité que la boule tirée soit noire sachant qu'elle porte le numéro 3 est : $P_B(A) = \frac{1}{2}$.

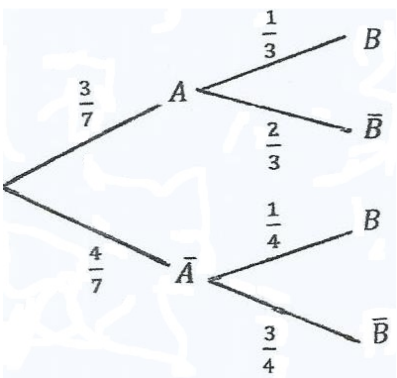
<u>Conséquences</u> : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\overline{B}) + P_A(B) = 1$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

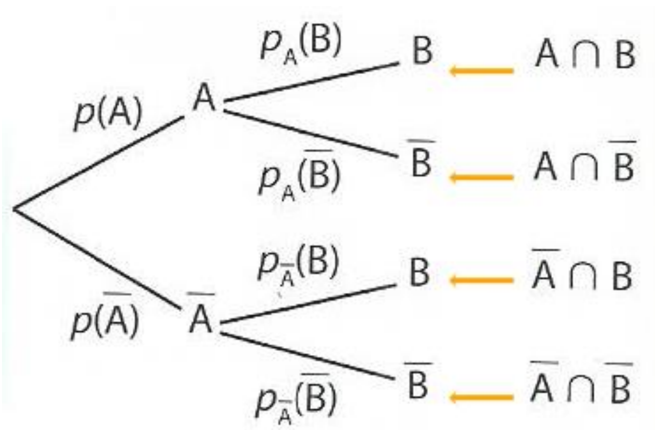
II. Arbres pondérés

<u>Exemple étudié au paragraphe I</u>.

L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



De façon générale on a :



Exercices : n° 17, 35, 36, 40, 41 et 43 pages 295, 296 et 297.
n° 22 page 295 pour introduire et découvrir la suite du cours.

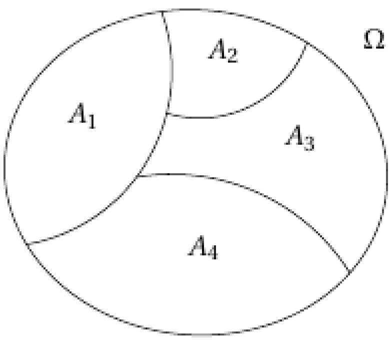
II. Partition et formule des probabilités totales

Définition : Les évènements A_1, A_2, A_3, ... , A_n , de probabilités non nulles, d'un univers Ω forment une partition de Ω si :

- ils sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \emptyset$ avec i et j des nombres compris entre 1 et n.
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n = \Omega$.

On dit que la famille des événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forme une **partition** de A.

Dis autrement, une partition de l'univers c'est un ensemble de sous-ensemble de l'univers, tel que ces ensembles soient disjoints et recouvrent l'univers tout entier.



Remarque : A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω.

Propriété: **Formule des probabilités totales**

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et un événement B. On note $A_1, A_2, \dots, A_n$, n événements non vides formant une partition de l'univers Ω.

Alors

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)}$$

Exemple étudié aux paragraphes précédents :

Si { B s'est produit } alors { B s'est produit ET A s'est produit } OU { B s'est produit ET $\bar{A}$ s'est produit }.

Autrement dit, {B} = { B∩A } ∪ { B∩ $\bar{A}$ }

Soit : P(B) = P(B∩A) + P(B∩A)

$$= \frac{3}{7} \text{x} \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \text{x} \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$$

Remarque : la formule des probabilités totales nous dit autrement que la probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune de ces "feuilles".

Exercice-exemple à faire à la maison :

Calculer la probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles en utilisant la formule des probabilités totales.

ENONCE ET SOLUTION EN VIDEO : *https://youtu.be/qTpTBoZA7zY*

Exercices : n° 52, 54, 55, 50 et 51 pages 298 et 299.
n° 85 et 88 page 303 Python et modélisation pour Médecine.

III. L'Indépendance

1) Indépendance de deux événements

Définition : On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque :
On a également :
A et B sont indépendants, si et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

2) Propriété :

Si *A* et *B* sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration :

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B \cap \bar{A}) \\ &= P(B) \times P_B(\bar{A}) \\ &= P(B) \times \left(1 - P_B(A)\right) \\ &= P(B) \times \left(1 - P(A)\right) \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &= P(B) \times P(\bar{A}) \end{aligned}$$

Donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.

3) Exemple :

Lors d'un week-end prolongé, *Bison futé* annonce qu'il y a 42% de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63% sur l'autoroute A7.
Soit *A* l'événement "On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6."
Soit *B* l'événement "On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7."
On suppose que les événements *A* et *B* sont indépendants.

Alors les événements $\bar{A}$ et B sont également indépendants et on a :
$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B) = 0{,}58 \times 0{,}63 = 0{,}3654$

On peut interpréter ce résultat :
La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 est égale à 36,54%.

Exercices : n° 18, 25, 26, 67, 31, 69 et 73 pages 295 à 301.