FONCTION EXPONENTIELLE

Dans la nature, en informatique ou dans la société, on dit de nombreux phénomènes qu'ils suivent « une loi exponentielle ». Cela signifie que leur évolution dans le temps ressemble à une fonction exponentielle : ces phénomènes augmentent de plus en plus vite, comme une multiplication à chaque instant. Ce n'est pas comme une augmentation régulière (« linéaire ») ou on ajoute le même nombre à chaque instant.

On parle de loi exponentielle pour :

- Le développement de populations, en particulier de certaines bactéries
- Le phénomène de radioactivité
- Le temps d'exécution des algorithmes en informatique
- La libération d'énergie dans une bombe nucléaire
- La diffusion d'informations sur Internet, et principalement sur les grands réseaux sociaux comme Facebook
- La propagation d'épidémies
- etc.

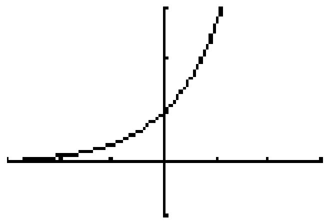
Tous ces phénomènes sont caractérisés comme étant un peu « lents » à démarrer, pour ensuite connaître une évolution dans le temps de plus en plus rapide et importante.

I. Définition de la fonction exponentielle

<u>Propriété et définition</u> : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp(x) ou $\mathbf{e^x}$**.

<u>Conséquence</u> : $\mathbf{e^0} = 1$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



II. Étude de la fonction exponentielle

1) <u>Dérivabilité</u>

<u>Propriété</u> : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{(\exp x)' = \exp x}$

2) <u>Variations</u>

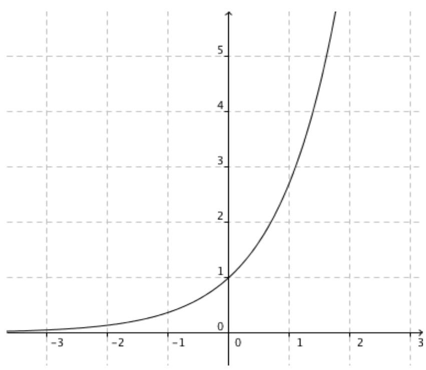
<u>Propriété</u> : La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

En effet, $(\exp x)' > 0$ car $(\exp x)' = \exp x > 0$.

3) <u>Courbe représentative</u>

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$	+	
$\exp x$	0 ↗	$+\infty$



4) Signe de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Dans le langage populaire exponentielle signifie souvent « qui a une croissance rapide et continue ».
Exemple : montée **exponentielle** du chômage.
Sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse déjà le milliard.

Exercices : n° 33 page 171 + n° 70 à 72 page 174.

III. Propriétés de la fonction exponentielle

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y, on a : $\boxed{\exp(x+y) = \exp x \exp y}$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Propriétés : Pour tous réels x et y, on a :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^{x+y} = e^x e^y$ $\qquad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\qquad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\qquad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercices : n° 25, 26 et 30 page 171 + n° 42, 52, 59 et 61 page 172.

2) Le nombre e

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. On a ainsi $\exp 1 = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

```
e^1
        2.718281828
```

Comme π, le nombre e est un nombre **irrationnel**, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.
Ses premières décimales sont :
$e \approx$ 2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178 5251664274…
Le nombre e est également un nombre **transcendant**. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.
Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$.

IV. Résolution d'équations et d'inéquations

Propriétés : Pour tous réels a et b, on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
c) $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

Exemples :

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Exercices : n° 74 et 79 page 174.

V. Fonctions de la forme $t \longmapsto e^{kt}$

1) Variations

Propriété 1 :

La fonction $t \longmapsto e^{kt}$, avec $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est la fonction $t \longmapsto ke^{kt}$.

Démonstration :
On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \longmapsto g(at+b)$ est $t \longmapsto ag'(at+b)$.
En considérant $g(t) = e^t$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

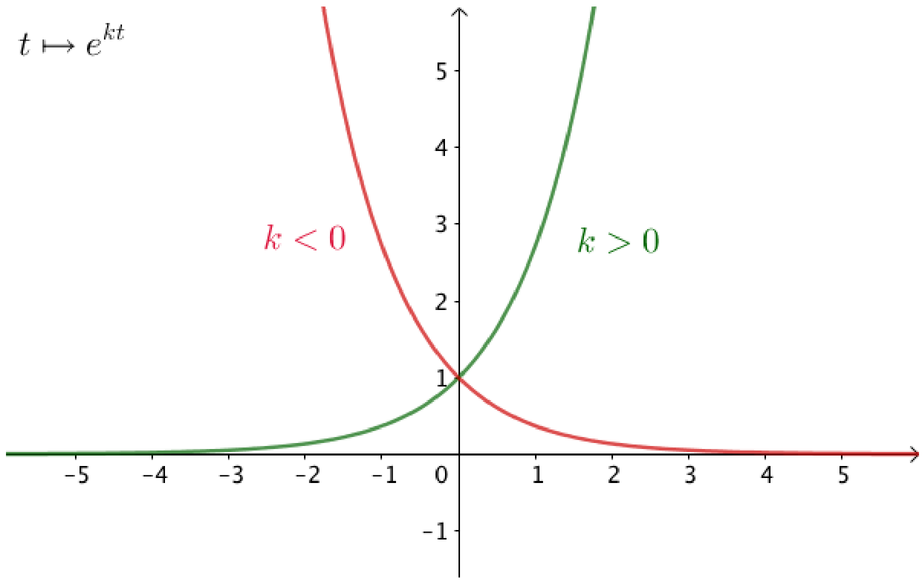
Exemple :
Soit $f(t) = e^{-4t}$ alors $f'(t) = -4e^{-4t}$.

Propriété 2 :

Si $k > 0$: la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est croissante.
Si $k < 0$: la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est décroissante.

Démonstration :
On a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$
Or, $e^{kt} > 0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.
Donc le signe de la dérivée $t \longmapsto ke^{kt}$ dépend du signe de k.
Si $k > 0$ alors la dérivée est positive est donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est croissante.
Si $k < 0$ alors la dérivée est négative est donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est décroissante.

2) Représentation graphique



Exercices : n° 34 page 171 + n° 89 et 93 page 176 + n° 101, 103 et 104 page 178.