

Le problème du sac à dos fait partie des problèmes **d'optimisation combinatoire** les plus étudiés ces cinquante dernières années, en raison de ces nombreuses applications dans le monde réel. En effet, ce problème intervient souvent comme sous-problème à résoudre dans plusieurs domaines : la logistique comme le chargement d'avions ou de bateaux, l'économie comme la gestion de portefeuille ou dans l'industrie comme la découpe de matériaux.

Tous les élèves ont rédigé une solution au problème. Cette solution est la solution optimale au problème du sac à dos tel qu'il était exposé dans ce devoir maison. Tous ont « joué le jeu » et certains ont mis à profit un usage des outils numériques de leurs choix.

On souhaitait prendre une partie T de ces objets dans notre sac-à-dos, malheureusement, ce dernier dispose d'une capacité limitée W . On ne pourra pas toujours mettre tous les objets dans le sac étant donné que la somme des poids des objets ne peut pas dépasser la capacité maximale.

On va cependant chercher à maximiser la somme des valeurs des objets qu'on va emporter avec soi.

Solution naïve (ou méthode « Force Brute ») :

On pourrait être tenté d'énumérer toutes les combinaisons d'objets possibles qui satisfont à la capacité maximale du sac ou qui s'en rapprochent (le sac ne doit pas être obligatoirement rempli à fond). Néanmoins, on arrive rapidement à un temps de résolution trop long pour un élève de 5^{ème} et des compétences en programmation au delà du niveau. Néanmoins, une élève de 5^{ème} a tenté une démarche succincte en élaborant une partie de la liste des combinaisons possibles du choix des objets.

Les trois quart des élèves ont élaboré et expliqué une stratégie. Sans le savoir ils ont mis en place ce que l'on appelle « L'algorithme Glouton ».

Solution approchée (ou méthode « Algorithme Glouton ») :

L'idée à suivre, si on veut développer une méthode gloutonne, est d'ajouter les objets de valeurs élevées en premier, jusqu'à saturation du sac.

On calcule donc les rapports valeurs/poids pour dresser la liste décroissante des objets ayant la plus grande valeur.

Tous les élèves ont trouvé qu'il fallait choisir les objets suivants :

Le pot de confiture, le poste de radio, les haltères, le cerf-volant, les voitures et tous les soldats de plomb.

Ce qui fait un total en poids de $1 + 4 + 2 + 0.6 + 0.125 + 18 \times 0.003 = 7.779 \text{ kg}$ (la contrainte des 8 kg est respectée) et un total monétaire de :

$2.16 + 12.60 + 4.28 + 8.60 + 6.50 + 18 \times 2.50 = 79.14 \text{ €}$

? Cette solution est-elle optimale ?

Rien, *a priori*, ne garantit l'optimalité de cette solution. Voici la preuve sur un exemple :

Faiblesses des algorithmes gloutons :

Les algorithmes gloutons présentent l'avantage d'une conception relativement aisée à mettre en oeuvre. Cependant, le prix à payer est qu'ils ne fourniront pas toujours la solution optimale au problème donné.

Les poids que j'ai fourni dans le devoir maison sont relativement équilibrés, de sorte que la solution fournie est optimale.

Mais qu'en serait-il si les poids des objets étaient très déséquilibrés ?

Voici l'exemple : on dispose d'un sac à dos d'une capacité de 40 kg et de la liste d'objets suivante

Objets	A	B	C	D	E	F
Valeurs	30	12	12	12	12	4
Poids	24	10	10	10	10	1
Valeurs/ Poids	1,25	1,2	1,2	1,2	1,2	4

Liste d'objets à notre disposition :

L'algorithme Glouton choisira l'objet A, l'objet F + un des objets B,C,D ou E, ce qui fera une somme des valeurs de 46 ($30 + 4 + 12 = 46$) et un poids total de 35 kg ($24 + 1 + 10 = 35$).

Pourtant, on remarque directement qu'en choisissant les 4 objets B,C,D,E on aurait pu atteindre une somme des valeurs de 48, pour un poids de 40 kg.

L'algorithme Glouton (mis en oeuvre par tous les élèves lors du devoir maison) n'a pas produit ici une solution optimale.

Comment faire pour avoir une solution optimale ?

Il existe de nombreuses méthodes exactes de résolution du problème. Citons à titre d'exemples :

- la programmation dynamique
- la programmation divide-and-conquer.
- La procédure d'évaluation et de séparation (PSE).
- les algorithmes génétiques.

Dans certains cas, les algorithmes gloutons produisent d'excellents résultats et sont appropriés au problème, dans d'autres cas, non.

Généralement, si les poids des objets sont très déséquilibrés, les algorithmes gloutons produiront une solution non optimale car de tels algorithmes ont une mauvaise vision globale du problème.

Il faut réfléchir à la solution à adopter en fonction du problème.

Le problème du sac à dos

- Classe : 5e
- Thème de travail concerné : Résoudre un problème complexe
- Dans le programme de la classe visée

Compétence attendue		
Mettre un maximum d'objet dans un sac à dos en optimisant des contraintes de masse et de gains.		
Connaissances	Capacités	attitudes
<ul style="list-style-type: none">• Nombres décimaux• Unités de mesure des masses	Savoir calculer et raisonner	Prise d'initiatives

- La situation complexe

L'élève doit mettre en œuvre un raisonnement pour déterminer la solution optimale. Plusieurs stratégies sont possibles, plusieurs solutions également, même s'il y a existence d'une solution optimale. L'élève comparant deux listes différentes et retenant la plus avantageuse sera compétent même s'il n'a pas la solution optimale.

- Production ou réalisation attendue

Résolution du problème en utilisant un langage adapté. Mise en évidence d'un raisonnement et rédaction compréhensive d'une solution.

- Outils de travail

Tous les outils numériques à disposition de l'élève.

- Modalités de travail

Travail à la maison.

Le problème du sac à dos

- Compétences, domaines, items du socle commun de compétences concernés par cette situation

Compétence	Domaine	Items
Compétence 3	Pratiquer une démarche scientifique	Rechercher et extraire l'information utile
		Calculer
		Raisonner, argumenter
		Présenter la démarche suivie, communiquer à l'aide d'un langage adapté
	Savoir utiliser des connaissances mathématiques	Nombre et calcul : connaître et utiliser les nombres décimaux, mener à bien un calcul.
		Grandeurs et mesure : calculer des valeurs en utilisant différentes unités
Compétence 1	Lire	Lire seul et comprendre un énoncé
		Repérer dans un texte des informations explicites
Compétence 7	Être capable de mobiliser ses ressources intellectuelles	Être autonome dans son travail
	Faire preuve d'initiatives	Prendre des initiatives, des décisions

L'évaluation est différenciée en fonction des difficultés identifiées par l'enseignant.
